

---

31 de Outubro de 2019

**Trabalho de Conclusão de Curso: Monografia**  
Bacharelado em Física

**Liberdade Assintótica na Seção de Choque**  
 $e^+e^- \rightarrow (\text{hádrons})$

Marcus Vinícius G. Rodrigues

**Orientador:** Prof. Dr. Diogo Boito

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física de São Carlos  
Dept. de Física e Ciência Interdisciplinar  
Grupo de Física Teórica

---

**Resumo:** O cálculo da seção de choque  $e^+e^- \rightarrow (\text{hádrons})$  é um dos principais testes da teoria das interações fortes, a Cromodinâmica Quântica (QCD). A liberdade assintótica, prevista pela função  $\beta$  da QCD, que garante que o acoplamento forte diminui de intensidade para energias mais altas, é um ingrediente crucial neste cálculo. Neste trabalho testamos a liberdade assintótica da QCD com a evolução de  $\alpha_s$  a um loop utilizando dados reais e recentes para a seção de choque  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hádrons})$ .

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Construção do observável <math>R(s)</math></b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Cálculo de <math>\Pi(s)</math> a um loop</b>	<b>8</b>
3.1	Límite de $m = 0$ . . . . .	9
3.2	Caso massivo . . . . .	10
<b>4</b>	<b>O processo de renormalização e a função <math>\beta</math> da QCD</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Determinação de <math>\alpha_s(s)</math> a um loop</b>	<b>14</b>
5.1	Resultados . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>18</b>

## 1 Introdução

A física de partículas elementares estuda a matéria no seu nível mais fundamental, nas menores escalas de comprimento. Podemos dizer que este ramo da física se iniciou no final do século XIX com a descoberta do elétron por J. J. Thomson e se fortaleceu ainda mais na virada para o século XX, principalmente com a descoberta do fóton nos diversos experimentos que colocavam em xeque a Mecânica Clássica e levaram ao nascimento da Mecânica Quântica.

Qualquer teoria para as partículas elementares deve ser consistente com a Relatividade Especial. A combinação da Mecânica Quântica com a Relatividade Especial levou Dirac à equação hoje conhecida como *equação de Dirac*, que descreve partículas de spin-1/2, e ao combinar com a Teoria Clássica de Campos entramos no ramo da Teoria Quântica de Campos (QFT). A quantização do campo eletromagnético, necessária para descrever o efeito fotoelétrico, trouxe um novo formalismo para a interação entre as partículas. Os quanta dos campos são interpretados como partículas com números quânticos bem definidos, e as interações entre elas são mediadas por outros campos, cujos quanta também são partículas. Dessa forma, podemos pensar na interação entre dois elétrons, por exemplo, como sendo consequência da troca de fótons.

O primeiro grande triunfo dessa nova teoria veio com a Eletrodinâmica Quântica (QED) [1], que descreve a interação de elétrons e pósitrons com o campo eletromagnético quantizado. O sucesso do programa de renormalização — desenvolvido por Feynman, Schwinger, Tomonaga, Dyson e outros — para lidar com os infinitos que surgiam na teoria possibilitou cálculos com precisão muito maior, levando a QED a um acordo espetacular com os experimentos.

Esse novo formalismo para a interação entre as partículas trouxe uma nova abordagem para um problema existente no modelo atômico: a estabilidade do núcleo. Para compensar a repulsão Coulombiana entre os prótons é necessário que exista uma outra força entre os nêutrons e prótons capaz de estabilizar o núcleo. Essa é a chamada força nuclear forte e sua primeira teoria quantitativa veio com Yukawa, que propôs a existência de uma partícula mediadora massiva (da ordem de 300 vezes a massa do elétron), tornando assim o alcance da força extremamente curto — da ordem do raio do núcleo atômico. De fato, uma partícula com as propriedades previstas por Yukawa foi encontrada em 1947, em experimentos envolvendo raios cósmicos, por César Lattes e seu grupo [2].

O aumento da precisão experimental em conjunto com estudos mais detalhados revelaram um grande número de novas partículas com diferentes características — modos de decaimento, carga, massa, etc. O modelo para explicar as propriedades dessas diversas partículas veio em 1964, quando foi proposta a existência dos *quarks*. Os quarks são partículas elementares de spin-1/2 e carga elétrica fracionária que, quando combinados, formam os *hádrons*. O próton, por exemplo, passou a ser visto como um estado ligado entre dois quarks *u* e um quark *d* (os diferentes tipos de quarks são chamados de *sabores*). Uma outra importante característica dos quarks está na existência de três cargas de cor, e portanto hádrons como o  $\Delta^{++}$  (*uuu*) não apresentam violação no princípio da exclusão de Pauli [3]. Assim como a QED representa a interação entre partículas com carga elétrica, que é mediada por fótons, a interação forte atua em partículas com carga de cor e possui o *glúon* como mediador. A teoria de calibre que descreve a interação forte é a Cromodinâmica Quântica (QCD).

Apesar das diversas evidências experimentais para a existência de quarks, eles nunca foram observados livres na natureza. A ausência dessas observações é explicada pela hipótese do *confinamento de cor*, que postula que objetos com carga de cor diferente de zero não se propagam como partículas livres, ficando confinados em estados singletos de cor, formando hádrons como o próton e o nêutron, por exemplo. Acredita-se que o confinamento de cor tenha sua origem no fato do glúon também possuir carga de cor. Em particular, a auto-interação do glúon é responsável pela evolução peculiar do acoplamento forte como função da distância: a intensidade da interação forte cresce com a distância, o que é compatível com a ideia de confinamento, e tende a zero para distâncias curtas, representando a celebrada *liberdade assintótica* do acoplamento [4, 5].

O chamado Modelo Padrão (SM) da física de partículas, assim como a QED e a QCD, é uma teoria de interações entre campos baseada em simetrias de calibre. O SM pode ser separado em setores: a junção da QED com a teoria das interações fracas — responsável, por exemplo, pelo decaimento beta do nêutron — forma o setor da Teoria Eletrofraca; já o setor das interações fortes que descreve partículas com carga de cor — quarks e glúons — é representado pela QCD.

No que rege o setor das interações fortes, tanto as massas dos quarks quanto o acoplamento forte  $\alpha_s$  — análogo à constante de estrutura fina  $\alpha_{em} = e^2/4\pi\hbar c \approx 1/137$  — são parâmetros livres. O conhecimento preciso desses parâmetros é portanto um ingrediente fundamental em testes de consistência da teoria, bem como um dos desafios principais nos cálculos de precisão necessários para os colisores de partículas. Entretanto, o confinamento dos quarks torna a extração desses parâmetros fundamentais uma tarefa complexa. Precisamente por este fato, não são observáveis físicos no sentido estrito, e dependem de convenções relacionadas ao procedimento de renormalização da teoria.

O procedimento adotado para a determinação de  $\alpha_s$  (e da massa dos quarks) segue, grosso modo, sempre a mesma estratégia geral: calcula-se no estado da arte da QCD algum observável da teoria que possa ser medido com razoável precisão. As massas dos quarks e  $\alpha_s$  são então tratados — dentro de uma definição precisa — como parâmetros livres da previsão teórica; da comparação com os resultados experimentais é possível extrair esses parâmetros através de um procedimento estatístico. As previsões teóricas, em geral, são obtidas através dos cálculos de diagramas de Feynman, que são representações pictóricas de expressões matemáticas que descrevem amplitudes em teorias de campos. As regras de Feynman para o cálculo de diagramas dependem das interações fundamentais presentes na teoria [3].

Neste trabalho estamos interessados em realizar determinações para o acoplamento forte. Para isso trabalharemos com uma das principais quantidades mensuráveis da QCD: a seção de choque inclusiva de produção de hadrons em colisões elétron-pósitron,  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ . Usualmente, nestes estudos é utilizado o observável  $R(s)$ , definido por<sup>1</sup>

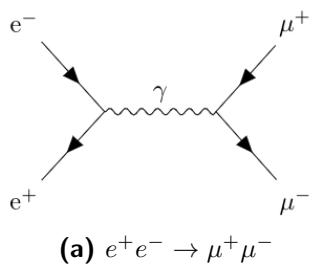
$$R(s) \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{hadrons})}{4\pi\alpha_{em}^2/3s} \simeq \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}, \quad (1.1)$$

onde a seção de choque da produção da muônica é calculada no limite sem massa e em ordem árvore [3], cujo diagrama de Feynman está apresentado na Fig. 1a. A energia total do centro de massa do sistema é dada por  $\sqrt{s}$ , sendo  $s$  a massa invariante do par  $e^+e^-$ .

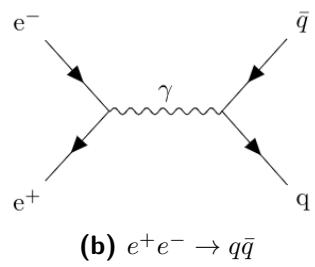
Em energias abaixo da escala eletrofraca, tanto a produção de múons quanto a de quarks e glúons é dominada por um fóton intermediário, e portanto os quarks e os múons acoplam-se à corrente eletromagnética. Por conta da *dualidade quark-hádron*, o numerador da Eq. (1.1) é descrito pela seção de choque  $e^+e^-$  com quarks e glúons no estado final. Devido ao confinamento de cor, este cálculo da seção de choque é pouco afetado por efeitos de longa distância, responsáveis pelo complexo processo de hadronização, a não ser nas proximidades de ressonâncias e, portanto, para energias suficientemente altas, o cálculo feito na QCD deve corresponder à seção de choque observada experimentalmente.

---

<sup>1</sup>Neste trabalho utilizamos o sistema natural de unidades  $\hbar = c = 1$ .



(a)  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$



(b)  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$

**Figura 1:** Diagramas de Feynman em ordem árvore para colisões  $e^+e^-$ . Em (a) temos a produção muônica e em (b) a produção de hadrões através do par  $q\bar{q}$  (quark-antiquark).

seja, traz as correções devido a produções e aniquilações de pares quark-antiquark a partir do fóton intermediário, e as trocas de glúons entre eles. Mais precisamente, a função  $\Pi_h(s)$  é o termo escalar das amplitudes dos diagramas de correções hadrônicas na polarização do vácuo, definida de forma a ser invariante de Lorentz.

Para energias distantes de ressonâncias, a relação entre o observável  $R(s)$  e  $\Pi_h(s)$  é [7]

$$R(s) = \frac{12\pi}{e^2} \text{Im}\Pi_h(s + i0), \quad (1.3)$$

sendo  $i0$  um indicativo de que devemos tomar a parte imaginária acima do eixo real<sup>2</sup>. Diferentes sabores de quarks contribuem para os estados hadrônicos, então é fundamental que todos os sabores ativos para uma dada energia total de centro de massa sejam considerados.

Na região de energia que se trabalha com  $R(s)$  as correções devido à QCD prevalecem, pois nessa região o acoplamento forte admite valores  $\alpha_s(s) \gtrsim 0.1$ , enquanto o acoplamento da QED vale cerca de  $1/137$  [8]. Isso implica em que as correções dominantes na expansão perturbativa de  $R(s)$  são em potências de  $\alpha_s(s)$  [8], isto é,

$$R(s) = N_c \sum_f Q_f^2 \left( 1 + \frac{\alpha_s(s)}{\pi} + \dots \right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_f^4}{s^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}^4}{s^2}\right), \quad (1.4)$$

Espera-se que em primeira aproximação a seção de choque da produção hadrônica — Fig. 1b — seja análoga à da produção muônica. Devemos apenas multiplicar pelo número de cores  $N_c$  para os quarks e realizar a transformação  $\alpha_{em} \rightarrow Q_f \alpha_{em}$ , sendo  $Q_f$  a carga elétrica do quark de sabor  $f$  (em unidades de  $e$ ). Portanto,

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hádrons}) \approx N_c \sum_f Q_f^2 \left( \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3s} \right), \quad (1.2)$$

onde a soma é feita sobre todos os sabores ativos até a energia  $\sqrt{s}$ , isto é, consideramos todos os sabores com massa  $m_f \lesssim \sqrt{s}/2$ .

Na prática, com o auxílio do teorema óptico [6], para calcular a seção de choque  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hádrons})$  basta calcularmos a parte imaginária das contribuições de estados intermediários hadrônicos no espalhamento frontal  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ , de modo que o observável  $R(s)$  pode ser descrito de forma perturbativa em termos de uma função escalar  $\Pi_h(s)$  que representa as correções da QCD ao propagador do fóton, ou

<sup>2</sup>A transformação  $s \rightarrow s + i0$  está relacionada à prescrição de Feynman ao escrever o propagador da teoria [6].

onde o termo  $\mathcal{O}(m_f^4/s^2)$  representa a correção devido às massas dos quarks e o termo  $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}^4/s^2)$  as contribuições que fundamentalmente não são perturbativas. A expressão teórica para  $R(s)$  escrita na forma da Eq. (1.4) é obtida calculando a parte perturbativa com  $m_f = 0$  — no chamado *limite quiral*.

Vários aspectos da QCD são testados em uma análise quantitativa de  $R(s)$ , a saber a carga elétrica fracionária, o número de cores e o acoplamento forte. Na Sec. 2 deste trabalho discutiremos a dedução da Eq. (1.3) e na Sec. 3 o cálculo de  $R(s)$  em ordem  $\alpha_s^0$  através do diagrama de um loop e usando o teorema óptico, incluindo a correção devido às massas dos quarks. Em seguida, iremos explorar uma abordagem mais fenomenológica do observável a fim de se extrair o valor do acoplamento forte a um loop em diferentes escalas de energia. Na Sec. 4 discutiremos em algum detalhe a função  $\beta$  da QCD, que prevê a liberdade assintótica de  $\alpha_s(s)$ . Por fim, com os dados experimentais para  $R(s)$  e sua formulação teórica até ordem  $\alpha_s$ , na Sec. 5 determinaremos o valor de  $\alpha_s(s)$  em regiões com  $N_f = 3, 4$  e  $5$ , sendo  $N_f$  o número de sabores ativos. A análise estatística será feita numa abordagem frequentista minimizando-se a função  $\chi^2$ .

## 2 Construção do observável $R(s)$

O teorema óptico é uma consequência direta da unitariedade da matriz de espalhamento na QFT [6]. Com ele, é possível relacionar a parte imaginária da amplitude  $\mathcal{M}(s)$  do diagrama da Fig. 2 com a soma de todas as contribuições de partículas em estados intermediários no espalhamento frontal, já que a descontinuidade no eixo real da amplitude para  $s \geq 4m^2$  (limiar de criação de duas partículas de massa  $m$ ) é fruto da possibilidade de serem criadas partículas na camada de massa. De forma mais específica, a relação entre  $\text{Im}\mathcal{M}$  e a seção de choque total  $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^-)$  do espalhamento  $e^+e^-$  para qualquer estado de partículas permitido é

$$\text{Im}\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) = 2\sqrt{s}|\mathbf{p}_{cm}| \sigma_{\text{tot}}(e^+e^-), \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{p}_{cm}$  é o momento de um dos elétrons incidentes no CM. No limite quiral temos que  $|\mathbf{p}_{cm}| = \sqrt{s}/2$ , e portanto

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+e^-) = \frac{\text{Im}\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)}{s}. \quad (2.2)$$



**Figura 2:** Diagrama de Feynman para o espalhamento frontal  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ . A bolha hachurada está relacionada à função  $\Pi_h(s)$ .

Neste caso, usando regras de Feynman a amplitude  $\mathcal{M}$  do diagrama da Fig. 2 é dada por [6]

$$i\mathcal{M} = [\bar{u}^s(p_1)(-ie\gamma^\sigma)v^r(p_2)] \frac{-ig_{\sigma\mu}}{q^2}(i\Pi^{\mu\nu}(q)) \frac{-ig_{\nu\lambda}}{q^2}[\bar{v}^r(p_2)(-ie\gamma^\lambda)u^s(p_1)], \quad (2.3)$$

onde  $u$  e  $v$  são os spinores de Dirac associados à partícula e à anti-partícula,  $\gamma$ 's são as matrizes de Dirac,  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço de Minkowski,  $p_i$  são os quadri-momentos das partículas externas (os quadri-momentos não se alteram no espalhamento frontal),  $q = (p_1 + p_2)$  é o quadri-momento do fóton intermediário e  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  é o tensor de polarização associado à bolha hachurada na Fig. 2, que leva em conta todas as correções ao propagador do fóton (não só as hadrônicas). Por conta da identidade de Ward [6]  $q_\mu\Pi^{\mu\nu}(q) = q_\nu\Pi^{\mu\nu}(q) = 0$  e, consequentemente, podemos escrever

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu})\Pi(q^2), \quad (2.4)$$

onde a função  $\Pi(q^2)$  é o termo puramente escalar na polarização do vácuo. O termo  $q^\mu q^\nu$  resulta em zero quando contraído com as correntes externas do elétron, então apenas o fator proporcional a  $g^{\mu\nu}$  sobrevive. Logo,

$$i\mathcal{M} = \frac{(-ie)^2}{s^2}[\bar{u}^s(p_1)\gamma_\mu v^r(p_2)][\bar{v}^r(p_2)\gamma^\mu u^s(p_1)](is\Pi(s)), \quad (2.5)$$

sendo que aqui já utilizamos o fato de que  $s = q^2$ .

Como não estamos interessados em estados de spin específicos, somamos sobre todas as possibilidades possíveis e utilizamos as propriedades de completeza dos spinores [3]. No fim, encontramos que o valor médio da amplitude é dado por

$$\langle \mathcal{M} \rangle \equiv \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M} = e^2 \Pi(s). \quad (2.6)$$

Finalmente, se considerarmos apenas as correções hadrônicas em  $\Pi(s)$ , deduzimos que a seção de choque da produção de hadrons é dada por

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) = \frac{e^2}{s} \text{Im}\Pi_h(s), \quad (2.7)$$

onde  $\Pi_h(s)$  representa apenas as correções hadrônicas ao propagador do fóton.

Da Eq. (2.7) na definição de  $R(s)$  concluímos que

$$R(s) = \frac{12\pi}{e^2} \text{Im}\Pi_h(s + i0), \quad (2.8)$$

onde aqui realizamos a transformação  $s \rightarrow s + i0$ . Essa equação nos mostra que para obter uma representação teórica para o observável  $R(s)$  basta calcularmos a parte imaginária das correções da QCD ao propagador do fóton.

Agora que deduzimos a Eq. (1.3) é interessante realizar o cálculo de  $\Pi_h(s)$  a um loop para obtermos de forma explícita a dependência em  $s$  do observável  $R(s)$  em ordem  $\alpha_s^0$ .

### 3 Cálculo de $\Pi(s)$ a um loop

Para obtermos a parte imaginária de  $\Pi_h(s)$  a um loop precisamos calcular a amplitude do diagrama da Fig. 3. Para este diagrama, considerando um quark de carga  $Q$  (em unidades de  $e$ ) e massa  $m$ , o cálculo da amplitude é essencialmente igual ao da polarização do vácuo em ordem dominante na QED multiplicado por  $N_c Q^2$ . Portanto [7]

$$i\Pi_{h,1}^{\mu\nu}(q) = -N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{i(\not{p} - \not{q} + m)(iQe\gamma^\mu)i(\not{p} + m)(iQe\gamma^\nu)}{[(p-q)^2 - m^2 + i0](p^2 - m^2 + i0)} \right\}, \quad (3.1)$$

onde  $\not{p} \equiv p^\mu \gamma_\mu$ . O índice 1 indica que o cálculo está sendo feito a um loop.

A integral para  $\Pi_{h,1}^{\mu\nu}(q)$  diverge para valores de  $p^2$  grandes — divergência ultravioleta. Visto que isso é consequência da dimensão  $D = 4$  do espaço de Minkowski, contornamos a divergência com o processo de regularização dimensional [10], que consiste em realizar a integral em  $D = 4 - 2\epsilon$  dimensões (no final dos cálculos devemos tomar o limite  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ).

Para manter a dimensão de  $\Pi_{h,1}^{\mu\nu}$  devemos introduzir um parâmetro global  $\mu^{2\epsilon}$  [7], sendo  $\mu$  uma escala de energia arbitrária. Assim, em  $D$  dimensões,

$$i\Pi_{h,1}^{\mu\nu}(q) \rightarrow -(Qe)^2 \mu^{2\epsilon} N_c \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{Tr} \left\{ \frac{(\not{p} - \not{q} + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\nu}{[(p-q)^2 - m^2 + i0](p^2 - m^2 + i0)} \right\}. \quad (3.2)$$

Contraindo os dois lados desta equação com  $g_{\mu\nu}$  e utilizando a Eq. (2.4) obtemos

$$\Pi_{h,1}(q^2 + i0) = \frac{-i\mu^{2\epsilon} Q^2 e^2 N_c}{(D-1)(q^2 + i0)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr}\{(\not{p} - \not{q} + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma_\mu\}}{[(p-q)^2 - m^2 + i0](p^2 - m^2 + i0)}, \quad (3.3)$$

onde o termo  $(D-1)$  do denominador surgiu da relação de contração da métrica  $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = D$ .

O traço e as propriedades de contração das matrizes  $\gamma$  dependem da dimensão  $D = 4 - 2\epsilon$  considerada nos cálculos [6]. Em específico para o numerador da Eq. (3.3) encontramos que

$$\text{Tr}[(\not{p} + m)\gamma_\mu(\not{p} - \not{q} + m)\gamma^\mu] = -4(D-2)p \cdot (p-q) + 4Dm^2. \quad (3.4)$$

Para tratar o denominador no integrando de  $\Pi_{h,1}(q^2 + i0)$  é conveniente utilizar os *parâmetros de Feynman* [6], que consiste em realizar a transformação

$$\frac{1}{(p^2 - m^2 + i0)[(p-q)^2 - m^2 + i0]} = \int_0^1 \frac{dx}{\{x[(p-q)^2 - m^2] + (1-x)(p^2 - m^2) + i0\}^2}. \quad (3.5)$$

Reescrevendo a Eq. (3.3) já com o resultado do traço, com um parâmetro de Feynman e em termos da variável  $l = p - xq$ , ficamos com

$$\begin{aligned}\Pi_{h,1}(q^2 + i0) &= \frac{-iN_c(Qe)^2\mu^{2\epsilon}}{(D-1)(q^2+i0)} \int_0^1 dx \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \\ &\times \frac{-4(D-2)(l^2 + \Delta) + [4(D-2) + 4D]m^2 + (\text{termos lineares em } l)}{(l^2 - \Delta)^2},\end{aligned}\quad (3.6)$$

onde  $\Delta$  é definido por

$$\Delta \equiv -[x(1-x)(q^2 + i0) - m^2]. \quad (3.7)$$

Por simetria, os termos lineares em  $l$  resultam em zero quando integrados em todo o espaço. Algumas simplificações para a integral surgem quando passamos a variável de integração para o espaço Euclídeo, pois assim poderemos utilizar coordenadas esféricas  $D$ -dimensionais. Para isso, realizamos uma *rotação de Wick* [6], que consiste em rotacionar apenas o eixo temporal  $l^0$  para uma direção temporal imaginária, isto é,  $\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{l}_E$  e  $l^0 = il_E^0$ . Assim,

$$\begin{aligned}\Pi_{h,1}(q^2 + i0) &= -4N_cQ^2e^2 \frac{D-2}{D-1} \frac{\mu^{2\epsilon}}{q^2 + i0} \int_0^1 dx \int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{-l_E^2 + \Delta}{(l_E^2 + \Delta)^2} + \\ &+ \frac{N_cQ^2e^2}{D-1} \frac{\mu^{2\epsilon}}{q^2 + i0} [4(D-2) + 4D]m^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Resolvendo as integrações em  $l_E$  utilizando coordenadas esféricas<sup>3</sup>, obtemos que para  $D = 4 - 2\epsilon$

$$\Pi_{h,1}(q^2 + i0) = -\frac{8N_cQ^2e^2}{(4\pi)^2(q^2 + i0)} (4\pi\mu^2)^\epsilon \Gamma(\epsilon) \left( \int_0^1 dx \Delta^{1-\epsilon} - m^2 \int_0^1 dx \Delta^{-\epsilon} \right). \quad (3.9)$$

As integrais em  $x$  restantes dependem da massa do quark. No caso  $m = 0$  podemos resolvê-las analiticamente em termos de funções  $\Gamma$ , e portanto teremos um resultado capaz de evidenciar o poder da regularização dimensional em tornar explícita a divergência. Deste modo, primeiro vamos realizar os cálculos no limite quiral e obter o valor para  $R(s)$  em primeira aproximação; em seguida trataremos da correção devido às massas.

### 3.1 Limite $m = 0$

No limite  $m = 0$  o segundo termo da Eq. (3.9) resulta imediatamente em zero. Para o primeiro termo, a integração em  $x$  pode ser escrita em termos de funções  $\Gamma$  com o auxílio da função beta de Euler<sup>4</sup>. Assim, para  $m = 0$ ,

$$\int_0^1 dx \Delta^{1-\epsilon} = (-q^2 - i0)^{1-\epsilon} \frac{\Gamma(2-\epsilon)\Gamma(2-\epsilon)}{\Gamma(4-2\epsilon)}. \quad (3.10)$$

Substituindo essa expressão na Eq. (3.9) e expandindo em torno de  $\epsilon = 0$  encontramos

$$\Pi_{h,1}(q^2 + i0)|_{m=0} = \frac{N_cQ^2e^2}{12\pi^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln\left(\frac{-q^2 - i0}{\mu^2}\right) + \frac{5}{3} + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \quad (3.11)$$

onde  $\gamma_E \approx 0.577$  é a constante *Gamma de Euler*.

---

<sup>3</sup>Integrais desse tipo podem ser encontradas na Ref. [6].

<sup>4</sup>A função beta de Euler é  $B(u, v) \equiv \int_0^1 dz z^{u-1} (1-z)^{v-1} = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ .

A Eq. (3.11) possui a divergência escrita de forma explícita no fator  $1/\epsilon$ , e portanto dizemos que a expressão está *regularizada*. Note que ainda temos um parâmetro de escala arbitrário  $\mu$  que surgiu no processo de regularização. Trataremos deste fator mais adiante ao falar da função  $\beta$  da QCD.

Para encontrarmos o valor de  $R(s)$  em primeira aproximação basta tomarmos a parte imaginária de  $\Pi_{h,1}(q^2 + i0)|_{m=0}$  e somarmos sobre todos os sabores ativos — vide Eq. (1.3). Como  $\text{Im}[\ln(-|z| - i0)] = -\pi$ , concluímos que

$$R(s) \approx N_c \sum_f Q_f^2. \quad (3.12)$$

Visto que cada sabor  $f$  de quark torna-se ativo em  $\sqrt{s} \approx 2m_f$ , o resultado numérico para  $R(s)$  em ordem  $\alpha_s^0$  e no limite quiral é

$$R(s) \approx \begin{cases} 2, & \sqrt{s} \lesssim 2 \times 1.275 \text{ GeV} \quad (\text{quarks } u, d, s) \\ \frac{10}{3}, & 2 \times 1.275 \lesssim \sqrt{s} \lesssim 2 \times 4.18 \text{ GeV} \quad (\text{quarks } u, d, s, c) \\ \frac{11}{3}, & \sqrt{s} \gtrsim 2 \times 4.18 \text{ GeV} \quad (\text{quarks } u, d, s, c, b) \end{cases}, \quad (3.13)$$

onde aqui já consideramos  $N_c = 3$ . Os valores para as massas dos quarks foram extraídos do *Particle Data Group* (PDG) [8] e estão no esquema de renormalização  $\overline{\text{MS}}$ .

### 3.2 Caso massivo

Para realizar os cálculos com massa devemos considerar uma expansão em torno de  $\epsilon = 0$  antes mesmo do processo de integração em  $x$ , já que neste caso não conhecemos as soluções analíticas das integrais. Ao expandirmos em série os integrandos da Eq. (3.9) ficamos com

$$\int_0^1 dx \Delta^{1-\epsilon} = \int_0^1 dx [\Delta - \Delta \ln(\Delta)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \quad \text{e} \quad \int_0^1 dx \Delta^{-\epsilon} = \int_0^1 dx [1 - \ln(\Delta)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)]. \quad (3.14)$$

Logo a parte imaginária de  $\Pi_{h,1}(q^2)$  é devido, até  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ , aos logaritmos.

Dada a definição de  $\Delta$  — Eq. (3.7) — e que  $\text{Im}[\ln(-|z| - i0)] = -\pi$ , teremos uma contribuição para a parte imaginária dos logaritmos apenas quando  $m^2 - x(1-x)q^2 \leq 0$ . Resolvendo essa desigualdade de 2º grau vemos que  $x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta]$ , onde  $\beta \equiv \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}$  é a velocidade dos quarks no CM (a unitariedade da matriz de espalhamento implica que a parte imaginária dos logaritmos é diferente de zero apenas para  $q^2 = s > 4m^2$ , que é o limiar de criação do par  $q\bar{q}$ ). Portanto, até  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  temos

$$\text{Im} \left\{ \int_0^1 dx \Delta^{1-\epsilon} \right\} = -\epsilon \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta} dx \Delta \text{Im} \ln(\Delta) = -\epsilon \pi \frac{\beta^3 q^2}{6} \quad (3.15)$$

e, analogamente,

$$\text{Im} \left\{ \int_0^1 dx \Delta^{-\epsilon} \right\} = \epsilon \pi \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta} dx = \epsilon \pi \beta. \quad (3.16)$$

Por fim, utilizando as Eqs. (3.15) e (3.16) na Eq. (3.9) e tomado  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , concluímos que

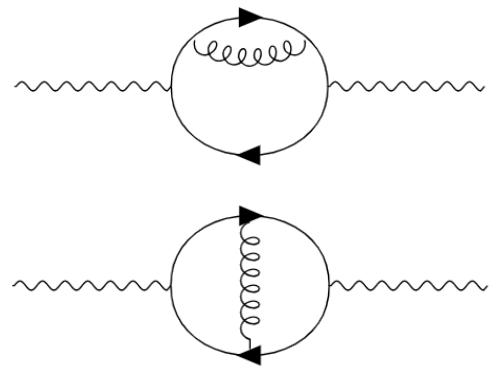
$$\text{Im}\left\{\Pi_{h,1}(q^2 + i0)\right\} = \frac{N_c Q^2 e^2}{12\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right). \quad (3.17)$$

Substituindo essa expressão na Eq. (1.3) e somando sobre todos os sabores ativos obtemos

$$R(s) = N_c \sum_f Q_f^2 \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{s}} \left(1 + \frac{2m_f^2}{s}\right) = N_c \sum_f Q_f^2 \left(1 - \frac{6m_f^4}{s^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_f^6}{s^3}\right). \quad (3.18)$$

Essa é a predição teórica para  $R(s)$  em ordem  $\alpha_s^0$  incluindo a correção devida às massas.

Nesta seção exploramos algumas das ferramentas matemáticas necessárias para abordar os cálculos de diagramas que envolvem loops. Para obter o valor de  $R(s)$  em ordem  $\alpha_s$  é necessário realizar o cálculo de  $\Pi_h(q^2 + i0)$  a dois loops, que inclui a troca de um glúon na polarização hadrônica do vácuo — Fig. 4. Este cálculo, que é apresentado na Ref. [9], está fora do escopo deste trabalho. Iremos considerar o resultado em ordem  $\alpha_s$  fornecido na Eq. (1.4) e os dados experimentais para realizar determinações de  $\alpha_s(s)$  a um loop. Para isso, antes devemos explorar o processo de renormalização para o acoplamento forte e encontrar qual a dependência explícita em  $s$  para  $\alpha_s(s)$  a um loop.



**Figura 4:** Diagramas de Feynman a dois loops na QCD para a polarização hadrônica do vácuo.

## 4 O processo de renormalização e a função $\beta$ da QCD

Tanto na QED quanto na QCD, quando realizamos cálculos de diagramas que envolvem loops precisamos lidar com integrais divergentes. Para obter quantidades físicas finitas, precisamos (i) *regularizar* as expressões (isto é, tornar explícitas as divergências), (ii) reconhecer que as partículas não interagentes (*nuas*) na qual a teoria da perturbação se baseia não são as partículas físicas reais que interagem (as interações modificam as propriedades das partículas, como a carga e a massa), e, por fim, (iii) devemos *renormalizar* a teoria ao relacionar as propriedades das partículas físicas com as das partículas nuas. Os infinitos originais da teoria aparecem nas relações entre as quantidades físicas e nuas. Essas relações, assim como as próprias partículas nuas, não são observáveis [11].

Na Sec. 3 abordamos o processo de regularização dimensional para tratar o cálculo de  $\Pi_h(s)$  a um loop. (Outro método de regularização bastante utilizado é o de Pauli-Villars, que está apresentado, por exemplo, nas Refs. [6, 11].) Na Eq. (3.11) temos o exemplo de uma expressão regularizada: a divergência ultravioleta ficou explícita no fator  $1/\epsilon$ , mas um fator de escala

arbitrário  $\mu$  foi necessário para corrigir a dimensão de  $\Pi_{h,1}(s)$ .

Enquanto o processo de renormalização é responsável por absorver as divergências explícitas, a *equação do grupo de renormalização* (RGE) impõe a independência de qualquer quantidade física do parâmetro  $\mu$  [7].

Quanto ao processo de renormalização a um loop, em específico do acoplamento forte, precisamos considerar 3 classes de diagramas a um loop: polarização do vácuo (4 diagramas), correção dos vértices (3 diagramas) e auto-energia dos quarks (1 diagrama). A natureza não-abeliana da QCD faz a quantidade de diagramas ser muito superior quando comparado à QED. Os cálculos desses diagramas podem ser encontrados, por exemplo, na Ref. [12].

Após considerar todos os diagramas que contribuem para a renormalização do acoplamento, definimos a constante de acoplamento adimensional renormalizada por

$$\alpha_s^R \equiv \alpha_s = Z_\alpha^{-1} \alpha_s^{\text{bare}}, \quad (4.1)$$

onde  $Z_\alpha$  é uma constante de renormalização e

$$\alpha_s^{\text{bare}} \equiv (g_{\text{bare}})^2 \mu^{-2\epsilon} / (4\pi), \quad (4.2)$$

sendo  $g_{\text{bare}}$  a constante de acoplamento nua que de fato aparece na Lagrangiana da QCD. Os infinitos que surgem ao regularizar as expressões dos diagramas são todos absorvidos em  $Z_\alpha$ .

No esquema de renormalização  $\overline{\text{MS}}$ , a constante de renormalização a um loop para  $\alpha_s(s)$  é [7]

$$Z_\alpha(s) = 1 + \frac{\alpha_s(s)}{\pi} Z_\alpha^{(1)} \frac{1}{\hat{\epsilon}} + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \quad (4.3)$$

onde

$$\frac{1}{\hat{\epsilon}} \equiv \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) \quad \text{e} \quad Z_\alpha^{(1)} = -\frac{1}{12}(11N_c - 2N_f). \quad (4.4)$$

Para tratar a RGE, consideremos uma quantidade física  $F(q, \alpha_s, m)$ , onde  $q$  representa os momentos externos,  $\alpha_s(s)$  representa o acoplamento da QCD renormalizado e  $m$  a massa do quark também renormalizada — tomemos apenas um sabor de quark para simplificar. Visto que  $F(q, \alpha_s, m)$  é uma quantidade física, não pode depender do parâmetro de renormalização arbitrário  $\mu$ . Essa imposição se traduz matematicamente na RGE para  $F(q, \alpha_s, m)$ :

$$\mu \frac{dF}{d\mu} = \left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - \beta(a_s) \frac{\partial}{\partial a_s} - \gamma(a_s) m \frac{\partial}{\partial m} \right] F(q, a_s, m) = 0, \quad (4.5)$$

onde  $a_s(s) \equiv \alpha_s(s)/\pi$  e as funções  $\beta$  e  $\gamma$  são definidas por<sup>5</sup>

$$\beta(a_s) \equiv -\mu \frac{da_s}{d\mu} = \beta_1 a_s^2 + \beta_2 a_s^3 + \dots \quad (4.6)$$

$$\gamma(a_s) \equiv -\frac{\mu}{m} \frac{dm}{d\mu} = \gamma_1 a_s + \gamma_2 a_s^2 + \dots \quad (4.7)$$

---

<sup>5</sup>Várias definições destas funções aparecem na literatura, com diferentes fatores de  $\pi$ , sinais, etc. No caso da função  $\beta$ , a definição tradicional tem o sinal oposto à nossa, de modo que  $\beta_1 < 0$ .

A escolha do esquema de renormalização altera os valores para  $\alpha_s(s)$  e da massa dos quarks, mas de modo que qualquer quantidade física seja independente do processo de renormalização utilizado. Todavia, na prática, como trabalhamos com expansões perturbativas truncadas, sobra uma dependência residual do esquema de renormalização.

A função  $\beta$  da QCD governa a equação diferencial para o acoplamento forte como função da escala  $s$  e, por conseguinte, se conhecemos os seus coeficientes somos capazes de determinar qual a dependência de  $\alpha_s(s)$  com a energia. Atualmente esses coeficientes são conhecidos (analiticamente) até 5 loops [13]. Como neste trabalho estamos interessados na evolução de  $\alpha_s(s)$  a um loop, seguimos a Ref. [7] para obter o coeficiente  $\beta_1$ .

Utilizando as Eqs. (4.1) e (4.6) temos que

$$\beta(a_s) = -\mu \frac{d(Z_\alpha^{-1} a_s^{\text{bare}})}{d\mu} = \frac{\mu a_s^{\text{bare}}}{Z_\alpha^2} \frac{dZ_\alpha}{d\mu} - \frac{\mu}{Z_\alpha} \frac{da_s^{\text{bare}}}{d\mu}. \quad (4.8)$$

Tratamos o primeiro com uma regra da cadeia para tornar a derivada em termos de  $a_s$  e utilizando a definição da própria função  $\beta$  da QCD, enquanto que para segundo termo utilizamos a Eq. (4.2). Assim,

$$\beta(a_s) \left[ 1 + a_s \frac{1}{Z_\alpha} \frac{dZ_\alpha}{da_s} \right] = 2\epsilon a_s. \quad (4.9)$$

Essa última equação é geral e independe da quantidade de loops considerados no processo de renormalização. Todavia, para dar continuidade devemos utilizar a Eq. (4.3) que representa a constante de renormalização em apenas um loop. Logo,

$$(\beta_1 a_s^2 + \dots) \left\{ 1 + a_s \left[ \frac{Z_\alpha^{(1)}/\hat{\epsilon} + \mathcal{O}(a_s)}{1 + a_s Z_\alpha^{(1)}/\hat{\epsilon} + \mathcal{O}(a_s^2)} \right] \right\} = 2\epsilon a_s. \quad (4.10)$$

Realizando uma expansão em torno de  $\epsilon = 0$  (nesse limite  $\hat{\epsilon} \rightarrow \epsilon$ ), comparando os termos de  $\mathcal{O}(a_s)$  e utilizando o valor de  $Z_\alpha^{(1)}$  dado na Eq. (4.4) conseguimos obter o coeficiente  $\beta_1$ :

$$\beta_1 = -2Z_\alpha^{(1)} = \frac{1}{6}(11N_c - 2N_f). \quad (4.11)$$

Para encontrar os demais coeficientes da função  $\beta$  é necessário levar em consideração mais loops no processo de renormalização para  $\alpha_s(s)$ .

Agora que temos em mãos o coeficiente  $\beta_1$  podemos determinar a dependência de  $\alpha_s(s)$  a um loop com a energia. Considerando apenas um loop na Eq. (4.6), isto é, fixando  $\beta_{i \geq 2} = 0$ , temos

$$\frac{1}{\beta_1} \int_{a_s(\mu_1)}^{a_s(\mu_2)} \frac{da_s}{a_s^2} = - \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\mu}, \quad (4.12)$$

e ao realizar as integrais encontramos

$$\alpha_s(\mu_2) = \frac{\alpha_s(\mu_1)}{\left[ 1 - \frac{\alpha_s(\mu_1)}{6\pi} (11N_c - 2N_f) \ln \frac{\mu_2}{\mu_1} \right]}. \quad (4.13)$$

A Eq. (4.13) representa a evolução do acoplamento forte a um loop, supondo conhecido o acoplamento  $\alpha_s(\mu_1)$  em uma escala de energia  $\mu_1$ . Visto que na QCD temos  $N_c = 3$  e o número de sabores ativos é  $N_f \leq 6$ , o termo  $(11N_c - 2N_f)$  é positivo, e como consequência imediata  $\alpha_s(\mu_2)$  decresce de forma logarítmica e tende a zero no limite  $\mu_2 \rightarrow \infty$ , conforme mostrado na Fig. 5. Essa é a celebrada *liberdade assintótica* da QCD, que rendeu o Prêmio Nobel de Física de 2004 para David J. Gross, Hugh D. Politzer e Frank Wilczek [4, 5]. Além disso, no sistema natural de unidades que trabalhamos,  $[\text{energia}] = [\text{distância}]^{-1}$ , e portanto o acoplamento possui um crescimento logarítmico com a distância.

Para determinar a evolução de  $\alpha_s(s)$  podemos utilizar tanto um valor de referência  $\alpha_s(\mu_1)$  quanto a escala de energia  $\Lambda_{\text{QCD}}$  ( $\approx 200 \text{ MeV}$  no esquema  $\overline{\text{MS}}$  [8]) para qual o acoplamento forte diverge. Por convenção, utiliza-se como referência o valor de  $\alpha_s(s)$  na massa do bóson  $Z$ , cujo valor médio mundial calculado pelo PDG é [8]

$$\alpha_s(m_Z) = 0.1181 \pm 0.0011. \quad (4.14)$$

O resultado numérico para o acoplamento forte não pode ser previsto pelo SM, e portanto esse parâmetro fundamental deve ser determinado através de descrições teóricas rigorosas (como por exemplo da seção de choque  $e^+e^- \rightarrow (\text{hádrons})$ ) aliadas a dados experimentais. Agora que temos em mãos a evolução de  $\alpha_s(s)$  a um loop podemos fazer uso do observável  $R(s)$  estudado neste trabalho para determinar valores de referência em regiões com  $N_f = 3, 4$  e  $5$ .

## 5 Determinação de $\alpha_s(s)$ a um loop

Aqui vamos extrair valores de referência para  $\alpha_s(s)$  a um loop utilizando a predição teórica para  $R(s)$  até ordem  $\alpha_s$  sem considerar a correção devida às massas e as contribuições não perturbativas. Das Eqs. (1.4) e (4.13) ficamos com

$$R(s) = N_c \sum_{q=1}^{N_f} Q_q^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha_s(\mu_1)}{\pi} \frac{1}{\left[ 1 - \frac{\alpha_s(\mu_1)}{6\pi} (11N_c - 2N_f) \ln \frac{\mu_1}{\sqrt{s}} \right]} \right\}, \quad (5.1)$$

sendo que  $N_c = 3$  e  $N_f$  depende da região de energia a ser trabalhada. Para determinar o valor do acoplamento utilizamos dados experimentais do observável e realizamos uma minimização da função  $\chi^2$  considerando  $\alpha_s(\mu_1)$  um parâmetro livre e  $\mu_1$  uma escala de energia arbitrária.

O procedimento estatístico adotado é o seguinte: consideremos um conjunto de  $N$  medidas independentes  $y_i$  em pontos  $x_i$  conhecidos, e vamos pressupor que  $y_i$  é distribuído de forma Gaussiana com variância conhecida  $\sigma_i^2$  e média  $\mu(x_i; \boldsymbol{\theta})$ , sendo  $\boldsymbol{\theta}$  um vetor cujas entradas são os parâmetros da teoria a serem estimados. O objetivo principal é encontrar os valores para os parâmetros que minimizam a função [14]

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \mu(x_i; \boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_i^2}, \quad (5.2)$$

que mede a distância entre os dados e a teoria. Aqui não está sendo levado em conta a correlação entre os dados, de modo que a matriz de covariância é simplesmente diagonal.

As incertezas associadas ao ajuste podem ser estimadas com o auxílio da função  $\Delta\chi^2$  definida por

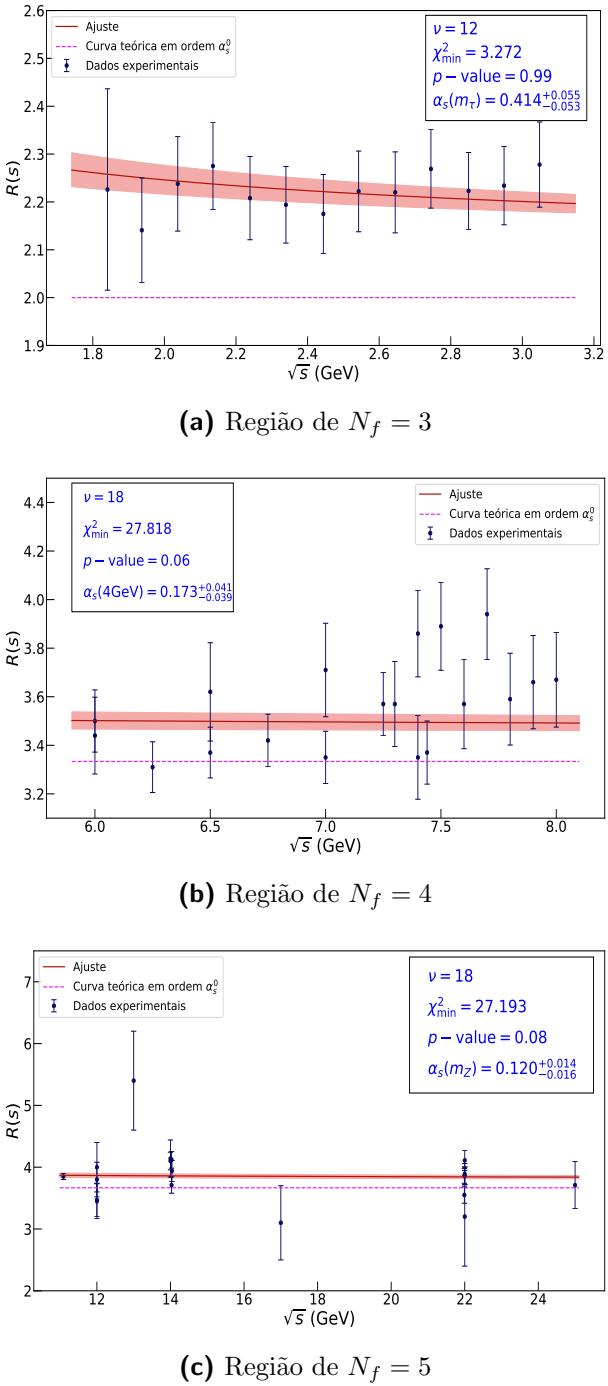
$$\Delta\chi^2(\boldsymbol{\theta}) = \chi^2(\boldsymbol{\theta}) - \chi_{\min}^2, \quad (5.3)$$

onde  $\chi_{\min}^2$  é o valor mínimo da função  $\chi^2$  obtida no processo de minimização da Eq. (5.2). No caso de apenas um único parâmetro livre, para um intervalo de confiança de 68% temos  $\Delta\chi^2 = 1$  [14].

O valor de  $\chi_{\min}^2$  e o número de graus de graus de liberdade (dof)  $\nu$ , que na situação em que temos um conjunto com  $N$  medidas e  $M$  parâmetros livres vale  $N - M$ , podem ser utilizados para encontrar o  $p$ -value, que mede a qualidade do ajuste.

## 5.1 Resultados

Os dados experimentais que devem satisfazer a Eq. (5.1) são aqueles cuja energia total de centro de massa  $\sqrt{s}$  está suficientemente longe de ressonâncias. Então, para determinar  $\alpha_s(s)$  na região de  $N_f = 3$  utilizamos os dados recentes do experimento KEDR [15] no intervalo  $1.8 \text{ GeV} \lesssim \sqrt{s} \lesssim 3.0 \text{ GeV}$ , enquanto para  $N_f = 4$  e  $5$  fizemos uso dos dados disponibilizados pelo PDG [16] nos intervalos  $6.0 \text{ GeV} \lesssim \sqrt{s} \lesssim 8.0 \text{ GeV}$  e  $11.0 \text{ GeV} \lesssim \sqrt{s} \lesssim 25.0 \text{ GeV}$ , respectivamente. Todos os dados foram considerados independentes, pois a correlação entre os mesmos não está publicada. As incertezas foram obtidas através da soma quadrática entre os erros sistemáticos e estatísticos disponibilizados.



**Figura 6:** Resultados dos ajustes encontrados via minimização do  $\chi^2$ . A linha tracejada (rosa) representa o valor teórico previsto em ordem  $\alpha_s^0$  dado na Eq. (3.13), a linha sólida (vermelho) representa a curva obtida no ajuste e a hachura representa o erro associado em  $1\sigma$ .

Para realizar os ajustes consideramos a minimização (numérica) da Eq. (5.2) com os valores teóricos dados pela Eq. (5.1). Deixamos  $\alpha_s(\mu_1)$  como parâmetro livre, enquanto fixamos  $\mu_1 = m_\tau$  (1.776 GeV) para a região de  $N_f = 3$ ,  $\mu_1 = 4$  GeV para a região de  $N_f = 4$  e  $\mu_1 = m_Z$  (91.19 GeV) para a região de  $N_f = 5$ . As incertezas  $\sigma$  referentes ao processo de ajuste foram estimadas com o auxílio da Eq. (5.3): como há apenas um único parâmetro livre, basta encontrarmos (numericamente) as soluções de

$$\chi^2(\hat{\alpha}_s(s) + \sigma) - \chi^2_{\min} = 1, \quad (5.4)$$

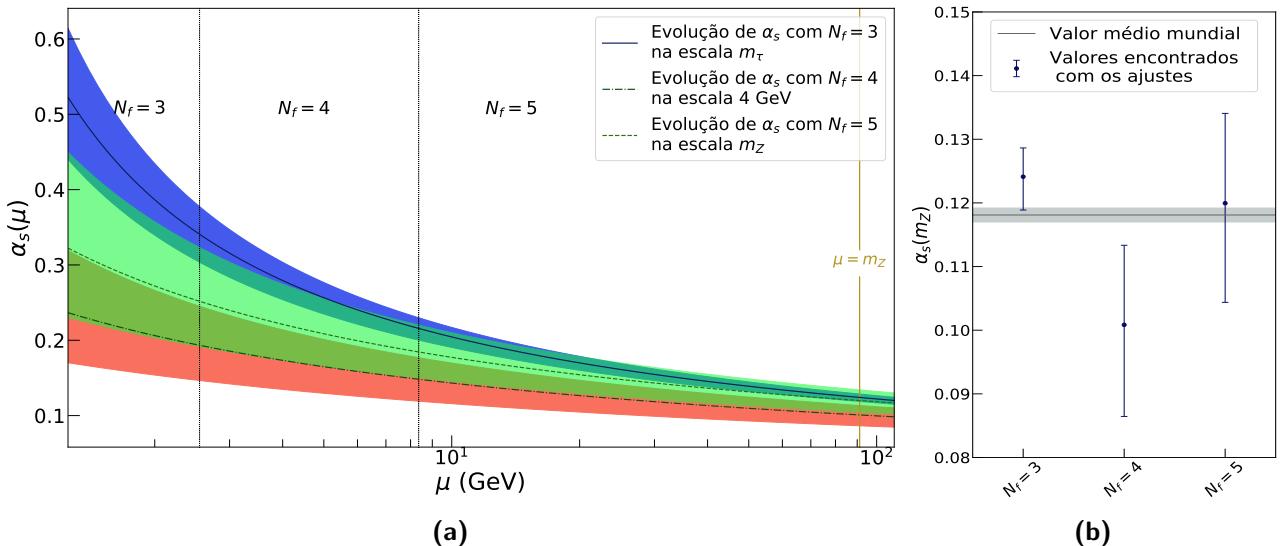
sendo  $\hat{\alpha}_s(s)$  o valor do acoplamento obtido no ajuste. É importante ressaltar que deste modo as incertezas para  $\alpha_s(s)$  são puramente estatísticas — não estamos levando em conta os erros associados ao truncamento da série perturbativa, por exemplo.

As curvas obtidas nos ajustes são comparadas com os dados experimentais na Fig. 6, enquanto os valores encontrados para  $\alpha_s(s)$  estão apresentados na Tab. 1. O valor do  $p$ -value nas regiões de  $N_f = 4$  e  $5$  diz que ambos os ajustes são razoáveis, enquanto o  $p$ -value para a região de  $N_f = 3$  nos permite dizer que o ajuste é excelente. Fica evidente na região de  $N_f = 3$  a necessidade das correções previstas pela QCD para descrever de forma rigorosa o observável  $R(s)$ , já que nessa região de energia as correções são da ordem de 10%. Para as regiões de  $N_f = 4$  e  $5$  as correções de  $\alpha_s(s)$  são menores, mas ainda assim é possível verificar dois conceitos não triviais da QCD: o número de cores  $N_c = 3$  para os quarks e a carga elétrica fracionada.

**Tabela 1:** Valores obtidos para  $\alpha_s(s)$  nas regiões de  $N_f = 3, 4$  e  $5$ .

$N_f$	$\alpha_s(s)$	$\chi^2_{\min}/\nu$	$p$ -value
3	$\alpha_s(m_\tau) = 0.414^{+0.055}_{-0.053}$	3.272/12	0.99
4	$\alpha_s(4 \text{ GeV}) = 0.173^{+0.041}_{-0.039}$	27.818/18	0.06
5	$\alpha_s(m_Z) = 0.120^{+0.014}_{-0.016}$	27.193/18	0.08

Os valores obtidos para  $\alpha_s(s)$  por si só já representam uma verificação quantitativa da liberdade assintótica, mas para realizar uma comparação entre os ajustes devemos evoluir os resultados até uma escala de energia comum. (Como estamos lidando com a acoplamento forte em apenas um loop, podemos evoluir os resultados obtidos para  $\alpha_s(s)$  sem impor relações de desacoplamento nos limiares de criação de novos sabores [17].) O resultado gráfico desta evolução está na Fig. 7, enquanto na Tab. 2 temos uma comparação entre os valores evoluídos até a escala  $\sqrt{s} = m_Z$  e o valor médio global já fornecido na Eq. (4.14).



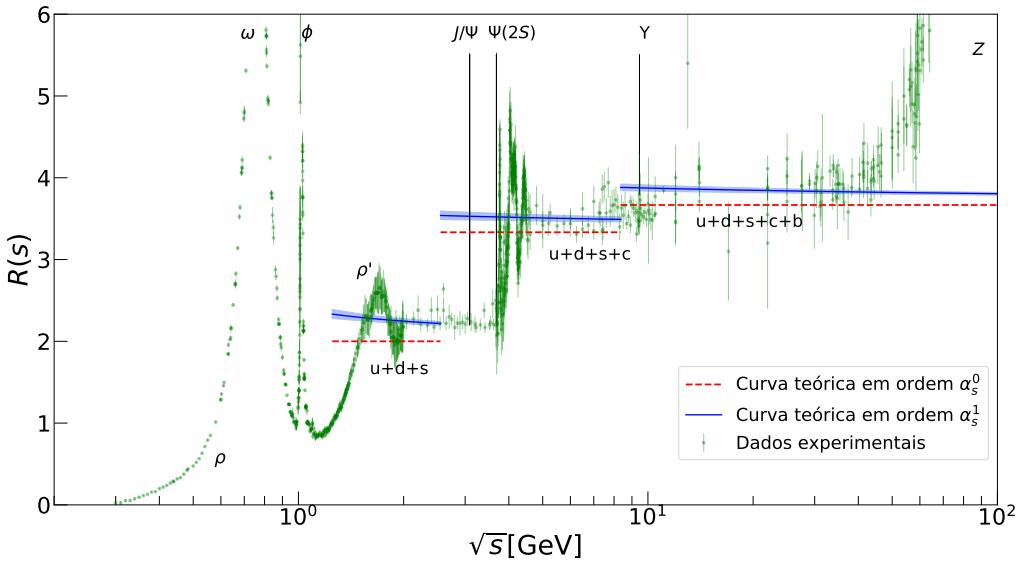
**Figura 7:** Evolução do valores de  $\alpha_s(s)$  obtidos nos ajustes. As três curvas são comparadas em (a) e em (b) é comparado os valores obtidos (via evolução) para  $\alpha_s(m_Z)$ . A linha sólida em (b) representa o valor médio global fornecido na Eq. (4.14). As hachuras representam o erro associado em  $1\sigma$ .

**Tabela 2:** Comparação dos ajustes na escala  $m_Z$ . Todos os valores são compatíveis em no máximo  $2\sigma$ .

	$N_f = 3$	$N_f = 4$	$N_f = 5$	Média mundial
$\alpha_s(m_Z)$	$0.124^{+0.005}_{-0.005}$	$0.101^{+0.013}_{-0.014}$	$0.120^{+0.014}_{-0.016}$	$0.1181 \pm 0.0011$

Como os valores encontrados para  $\alpha_s(m_Z)$  são todos compatíveis e estatisticamente independentes, realizamos uma média ponderada e encontramos um valor médio para o acoplamento forte na escala de energia do bóson  $Z$  dado por

$$\alpha_s(m_Z) = 0.1211 \pm (0.0044)_{\text{stat}}, \quad (5.5)$$



**Figura 8:** Compilação geral dos dados experimentais para  $R(s)$  fornecidos pelo PDG [16]. Cada salto nas curvas ocorre em  $\sqrt{s} \approx 2m_f$ . A linha tracejada (vermelha) representa o valor teórico para  $R(s)$  em ordem  $\alpha_s^0$  fornecido pela Eq. (3.13) e a linha sólida (azul) representa a curva em ordem  $\alpha_s$  obtida pelos ajustes. A hachura determina o erro associado em  $1\sigma$ .

onde aqui reforçamos que a incerteza é puramente estatística. O nosso resultado é compatível dentro de  $1\sigma$  ao valor médio mundial fornecido pelo PDG.

Por fim, na Fig. 8 mostramos a compilação geral dos dados experimentais para  $R(s)$  concomitantemente com a curva teórica em ordem  $\alpha_s^0$  — prevista pela Eq. (3.13) — e a curva em ordem  $\alpha_s$  obtida pelos ajustes. Algumas das ressonâncias presentes estão indicadas. Nos limitamos a colocar a curva teórica apenas para  $\sqrt{s} \gtrsim 1.5$  GeV, visto que para energias abaixo disso o alto valor para  $\alpha_s(s)$  torna impreciso o cálculo perturbativo na QCD, além da presença de várias ressonâncias.

## 6 Conclusão

Neste trabalho estudamos o observável  $R(s)$  relacionado à seção de choque inclusiva de produção de hadrons em colisões  $e^+e^-$ . Exploramos tanto a sua formulação teórica quanto uma abordagem fenomenológica para a determinação do acoplamento forte em regiões com  $N_f = 3, 4$  e  $5$ .

De ínicio, detalhamos a relação entre o observável e a parte imaginária da função  $\Pi_h(s)$ , que representa as correções da QCD ao propagador do fóton, por meio do teorema óptico. Apresentamos o cálculo de  $\Pi_h(s)$  a um loop com o intuito de determinar explicitamente a dependência de  $R(s)$  na energia em ordem  $\alpha_s^0$ , incluindo a correção devido às massas dos quarks. Isso exigiu explorar algumas das principais técnicas matemáticas necessárias para calcular diagramas que envolvem loops. Contornamos a divergência ultravioleta utilizando o processo de regularização dimensional, e com ele foi possível introduzir os conceitos de regularização e renormalização, que comumente são necessários em QFT.

Introduzimos os conceitos do grupo de renormalização e da função  $\beta$  da QCD, possibilitando a obtenção de uma forma fechada para a evolução de  $\alpha_s(s)$  a um loop. Assim, no que rege a abordagem fenomenológica, aliamos a descrição teórica para  $R(s)$  em ordem  $\alpha_s$  com os dados experimentais para extrair valores para o acoplamento forte em diferentes escalas de energia. A análise estatística foi feita numa abordagem frequentista minimizando-se a função  $\chi^2$ . Obtivemos  $\alpha_s^{N_f=3}(m_\tau) = 0.414_{-0.055}^{+0.053}$ ,  $\alpha_s^{N_f=4}(4 \text{ GeV}) = 0.173_{-0.039}^{+0.041}$  e  $\alpha_s^{N_f=5}(m_Z) = 0.120_{-0.016}^{+0.014}$ , e com isso conseguimos verificar de forma quantitativa a celebrada liberdade assintótica prevista pela função  $\beta$  da QCD. Ao evoluir os resultados até a escala de energia do bóson  $Z$  encontramos um valor médio para o acoplamento forte dado por  $\alpha_s(m_Z) = 0.1211 \pm 0.0044$ , que é compatível dentro de  $1\sigma$  com o valor médio global calculado pelo PDG.

A abordagem do observável  $R(s)$  deste trabalho exemplificou, ainda que de forma simplificada, o esforço global empreendido por diversos grupos de pesquisa na determinação precisa e competitiva de parâmetros livres do Modelo Padrão. No âmbito da seção de choque  $e^+e^- \rightarrow (\text{hádrons})$ , a predição teórica é conhecida atualmente até ordem  $\alpha_s^4$  (5 loops), onde os valores das correções hadrônicas ao propagador do fóton já são comparáveis às correções eletrofracas em primeira ordem. A qualidade dos dados para  $e^+e^- \rightarrow (\text{hádrons})$  permite, além do tratamento ponto a ponto de  $R(s)$  que realizamos neste trabalho, explorar o uso de regras de soma, permitindo assim determinações ainda mais precisas para  $\alpha_s(s)$  [18]. No artigo de revisão sobre QCD da Ref. [8] são citados alguns dos demais processos trabalhados na comunidade científica para a extração de  $\alpha_s(s)$ , como por exemplo o decaimento hadrônico do  $\tau$  [19] e QCD na rede [20].

A física de precisão desempenha papel fundamental no desenvolvimento da física de partículas. Com a diminuição das incertezas é possível detalhar cada vez mais possíveis desvios da teoria, e assim contribuir para a busca por física Além do Modelo Padrão.

## Referências

- [1] R. P. Feynman, *Space - time approach to quantum electrodynamics*, Phys. Rev. **76**, 769 (1949)
- [2] C.M.G. Lattes, G.P.S. Occhialini and C.F. Powell, *Observations on the Tracks of Slow Mesons in Photographic Emulsions. 1*, Nature **160**, 453 (1947)
- [3] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*, Weinheim, Germany: Wiley-VCH (2008)
- [4] D. J. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories*, Phys. Rev. Lett. **30**, no. 30, 1343 (1973)
- [5] H. D. Politzer, *Reliable perturbative results for strong interactions*, Phys. Rev. Lett. **30**, no. 26, 1346 (1973)

- [6] M. Peskin and D. Schroeder, *An introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press (1995)
- [7] M. Jamin, *QCD and renormalization group methods*,  
<http://www.maria-laach.tp.nt.uni-siegen.de/downloads/files/2006/Jamin-2006.pdf>
- [8] M. Tanabashi *et al.* [Particle Data Group], *Review of particle physics*, Phys. Rev. D **98**, no. 3, 030001 (2018)
- [9] P. Pascual and R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner*, Lecture Notes in Physics **194**, Springer-Verlag (1984)
- [10] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972)
- [11] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons (2010)
- [12] W. Greiner, S. Schramm and E. Stein, *Quantum Chromodynamics*, Springer Science & Business Media (2007)
- [13] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin and J. H. Kühn, *Five-Loop Running of the QCD coupling constant*, Phys. Rev. Lett. **118**, no. 8, 082002 (2017) [arXiv:1606.08659 [hep-ph]].
- [14] W.H. Press *et al.*, *Numerical recipes in C*, Cambridge University Press (1992)
- [15] V. V. Anashin *et al.*, *Measurement of  $R$  between 1.84 and 3.05 GeV at the KEDR detector*, Phys. Lett. B **770**, 174 (2017) [arXiv:1610.02827 [hep-ex]].
- [16] Os dados experimentais estão presentes em <http://pdg.lbl.gov/2018/hadronic-xsections/hadron.html>
- [17] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn and M. Steinhauser, *RunDec: A Mathematica package for running and decoupling of the strong coupling and quark masses*, Computer Physics Communications, **133**, 43–65 (2000) [arXiv:hep-ph/0004189].
- [18] D. Boito *et al.*, *Strong coupling from  $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$  below charm*, Phys. Rev. D **98**, no. 7, 074030 (2018) [arXiv:1805.08176 [hep-ph]].
- [19] D. Boito *et al.*, *Strong coupling from the revised ALEPH data for hadronic  $\tau$  decays*, Phys. Rev. D **91**, no. 3, 034003 (2015) [arXiv:1410.3528 [hep-ph]].
- [20] M. Bruno *et al.* [ALPHA Collaboration], *QCD Coupling from a Nonperturbative Determination of the Three-Flavor  $\Lambda$  Parameter*, Phys. Rev. Lett. **119**, no. 10, 102001 (2017) [arXiv:1706.03821 [hep-lat]].